

トムソン散乱とレイリー散乱

—宇宙物理学レポート—

物理学科 51519J 4年 小林憲正

5月24日

電荷と電磁波の相互作用を見る。散乱波は、電子が入射電磁波によって加速された時に発する放射と考えられる。電荷が等速直線運動をすることによって生じる電磁場は、静電磁場であるから、加速運動による寄与のみを考慮すればよい。真空中で位置 \vec{r} 、速度 \vec{v} の荷電粒子の加速度運動によって生じる、観測点 \vec{r} で時刻 t に観測されるポテンシャルは、電子の運動によつての等電位面の分布のゆがみを考慮して求められる Lienard-Wiechert ポテンシャルを用いて次のように記述される。

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\vec{v}}{R - \vec{v} \cdot \vec{R}/c}$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R - \vec{v} \cdot \vec{R}/c}$$

ただし、 $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ 。これに対応する電磁場は、微分演算子の電子の座標 (t', \vec{r}') から (t, \vec{r}) への変換に注意して計算すると、

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^2} [\vec{R} \times \{(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}) \times \dot{\vec{v}}\}], \quad s \equiv R - \vec{v} \cdot \vec{R}/c$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\vec{R} \times \vec{E}}{R}$$

ポインティングベクトルは、

$$\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H} = \epsilon_0 c \vec{E}^2 \frac{\vec{R}}{R}$$

点電荷からの放射のパワーは、 $\frac{dt'}{dt} = (\frac{dt}{dt'})^{-1} = \frac{s}{R}$ を用いて、

$$P = \int \frac{dw}{dt'} d\Omega = \int \frac{dw}{dt} d\Omega = \int |\vec{S}| R^2 \frac{s}{R} d\Omega = \int |\vec{S}| R s d\Omega$$

ただし、 $\frac{dw}{dt'} = |\vec{S}| R s$ は電子から \vec{r} 点の面積要素への方向（以下この方向を (θ, φ) と表す）に放射する散乱波のパワーで、 Ω は、 \vec{r} 点の面積要素を電子から見た立体角。 $\beta \equiv \frac{v}{c} \ll 1$ のとき、 $s \approx R$ と近似して、

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^2} \vec{R} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{v}}) \quad (1)$$

$$\vec{S} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta \frac{\vec{R}}{R}, \quad \theta \text{ は } \vec{R} \text{ と } \dot{\vec{v}} \text{ のなす角。} \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dt'} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \frac{\vec{R}}{R} \quad (3)$$

$$P = \int \frac{dw}{dt'} d\Omega = \int_0^\pi \frac{dw}{dt'} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (4)$$

次に散乱断面積について論じる。我々が見たいのは、古典的な領域での散乱であり、入射波は、定常平面波であって、入射波と電子との相互作用が弾性衝突であるとする（すなわち、入射波と電子と散乱波の系を考えるとエネルギーは保存している）。散乱の強度としての全断面積 σ は、自然に入射波の単位面積当たりのパワーに対する散乱波の全エネルギーとして定義される。同様に、微分断面積は、散乱体の中心から (θ, φ) 方向へ散乱する波の単位面積当たりのパワーと入射平面波の単位面積当たりのパワーの比であり、 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ である。従って、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\bar{\frac{dw}{dt'}}}{\bar{S}_{in}} \quad (5)$$

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{P}{\bar{S}_{in}} \quad (6)$$

が得られる。ただし、 \bar{S}_{in} などは、時間平均を意味する。トムソン散乱、レイリー散乱はともに平面波が調和振動している電子によって散乱されるモデルの極限である。電子の運動方程式は、 $\beta \ll 1$ の極限で近似的に、磁場の効果を無視して、

$$m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} + m\omega_0^2 \vec{r}' = e\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_0 - \omega t')} \quad (7)$$

入射電磁波によって起こる電子の強制振動が求めたいのであるから、(7) 式の特解を求めればよい。

$$\vec{r}'(t') = \vec{A} e^{-i\omega t'}$$

とにおいて (7) に代入すると、

$$\begin{aligned} m(\omega_0^2 - \omega^2) \vec{A} &= e\vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_0} \\ \vec{r}'(t') &= \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_0 - \omega t')} \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。(8) より、

$$\dot{\vec{v}}(t') = \ddot{\vec{r}}'(t') = -\frac{e\omega_0^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}_0 - \omega t')}$$

これを、(4) に代入して、 $\langle \dot{v}^2 \rangle = \text{Re}(\frac{1}{2} \dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}}^*)$ を考慮して、

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{e}{6\pi\epsilon_0 c^3} \langle \dot{v}^2 \rangle \\ &= \frac{e^4 \omega_0^4 E_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3 m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

一方、入射波の単位面積当たりのパワーは、

$$\bar{S}_{in} = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad (10)$$

従って、全断面積は、(9)、(10) を (6) に代入して、

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (11)$$

と求められる。角振動数 ω_0 は、電子の散乱体による束縛の強度に関係する。電子の束縛強度は、定性的に散乱体半径の減少関数である。1) $\omega \gg \omega_0$ の時は、トムソン散乱と呼ばれ、電磁波にとって、電子はほとんど自由電子のようにふるまう。

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \quad (12)$$

2) $\omega \ll \omega_0$ の時は、レイリー散乱と呼ばれ、電磁波のエネルギーに比べて電子の拘束が十分強い状態である。

$$\sigma_R \simeq \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^2} = \sigma_T \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} \quad (13)$$

普通の原子に対して、 ω_0 は紫外領域。従って可視光線はレイリー散乱される。レイリー散乱の断面積は、波長に反比例する。このため、空の色は太陽光線の大気による散乱波のスペクトルによって決まり、短波長領域が強くなるから、青くなる。一方夕日の色は、太陽光の大気の透過光のスペクトルによって決まり、長波長領域が強くなるから、赤くなる。X線はトムソン散乱される。トムソン散乱の断面積は、光の周波数によらないことが特徴的で、散乱体の荷数に比例する。この性質は、X線写真に利用されている。さらに短波長の γ 線になると、量子論的效果が無視できなくなり、コンプトン散乱となる。コンプトン散乱では、入射波と散乱波の周波数が異なるが、これは photon の著しい特徴である。トムソン散乱は、コンプトン散乱の長波長極限である。コンプトン散乱による photon のエネルギー変化は、散乱角を θ とすると、

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma(1 - \cos \theta)}{mc^2}} \quad (14)$$

である。